Interpretationshilfe zum sächsischen Lehrplan für den Umgang mit Termen und Gleichungen

Das Beherrschen von Basiswissen durch die Schüler aller Jahrgangsstufen ist eine wesentliche Voraussetzung für einen erfolgreichen Mathematikunterricht.

Die Fachberater Sachsens für Mathematik an Gymnasien möchten die Fachlehrerinnen und Fachlehrer Mathematik bei der Umsetzung dieser Aufgabe – welche auch die richtige Interpretation des Lehrplans voraussetzt – unterstützen.
Nicht zuletzt die Lehrkräfte der Hochschulen und Universitäten vermissen zunehmend Kenntnisse und Fertigkeiten sowie inhaltliches Verständnis bei den Studienanfängern, vor allem im Bereich „Terme und Gleichungen“.
Das vorliegende, speziell für diesen Schwerpunkt von den Fachberatern unter Mitwirkung von Vertretern der Hochschulen und Universitäten Sachsens erarbeitete Material, enthält für alle Klassenstufen Aufgabenbeispiele, deren Lösung von den Schülern ohne Hilfsmittel beherrscht werden müssen.
Es orientiert sich an den Angaben im Lehrplan im Rahmen der entsprechenden Lernbereiche.
Bei den angeführten Anforderungsbereichen (AB) muss beachtet werden, dass sie für die jeweilige Klassenstufe gelten, sich zwangsläufig aber entsprechend den aufsteigenden Anforderungen höherer Jahrgangsstufen ändern.
Die Festigung aller bereits behandelten Lehrplaninhalte zum Basiswissen erfordert eine stete Wiederholung bis in die Jahrgangsstufen 11 und 12.
Anhand dieser Aufgabenvorschläge können die Fachlehrerinnen und Fachlehrer für das operative, effiziente Training ihrer Schüler eigene Übungsserien erstellen.
Besonderes Augenmerk sollte hierbei auch auf Formen offener Aufgabenstellungen gelegt werden.
Ein Beispiel für die mögliche Vielseitigkeit bei deren Gestaltung stellt der aufgeführte Vorschlag zur Gleichung $a \cdot b = 64$ (siehe Klasse 5) dar. Insbesondere der mögliche Wechsel der Anforderungsbereiche bei Veränderung der Aufgabenstellung sollte berücksichtigt werden.

Die Fachberater Sachsens für Mathematik an Gymnasien August 2017

Aufgabenbeispiele für AB II

1 Die Zahlen $a = 4$ und $b = 16$ erfüllen die Gleichung $a \cdot b = 64$, weil $4 \cdot 16 = 64$ eine wahre Aussage ist.

Gib alle weiteren Paare natürlicher Zahlen *a* und *b* an, so dass die Gleichung $a \cdot b = 64$ wahr ist.

2 Ein Rechteck hat die Seitenlängen *a* und *b*.

2.1 Zeichne ein solches Rechteck, für welches gilt: $A = 64\ \text{cm}^2$.

2.2 Gib zwei weitere Paare von Seitenlängen *a* und *b* an, so dass das Rechteck einen Flächeninhalt von $A = 64\ \text{cm}^2$ besitzt.

Gib an, wie viele solcher Paare natürlicher Zahlen es gibt.

3 „Ich denke mir zwei Zahlen *a* und *b*, deren Produkt 64 beträgt. An welche beiden Zahlen könnte ich gedacht haben?“

Begründe Deine Antwort.

4 Beschreibe einen Sachverhalt, bei dem die Gleichung $a \cdot b = 64$ angewendet wird.

5 Paul sagt: „Wenn ich in der Aufgabe $a \cdot b = 64$ für *a* die Zahl 3 einsetze, so finde ich eine natürliche Zahl für *b*, so dass für das Produkt $a \cdot b = 64$ gilt.

5.1 Begründe, dass Pauls Aussage falsch ist.

5.2 Gib alle natürlichen Zahlen an, die du für *a* einsetzen kannst, so dass Pauls Aussage wahr wird.

6 In der letzten Mathematikstunde stand folgende Rechnung an der Tafel: $a \cdot b = 64$.

Setze für *a* nacheinander alle natürlichen Zahlen von 1 bis 20 ein und überprüfe, für welche dieser Zahlen du eine natürliche Zahl für *b* finden kannst, so dass die Gleichung $a \cdot b = 64$ wahr ist. Fertige dazu eine Tabelle an.

Zur Differenzierung

Varianten für AB I

7 Gegeben sind die Zahl $a = 4$ und die Gleichung $a \cdot b = 64$. Mit welchem Rechenausdruck kann die Zahl b berechnet werden? Kreuze die richtige Antwort an.

☐	☐	☐	☐	☐
$64 + 4$	$64 - 4$	$64 \cdot 4$	$64 : 4$	64^4

8 Gib zwei natürliche Zahlen *a* und *b* an, so dass gilt: $a \cdot b = 64$.

9 Für zwei natürliche Zahlen *a* und *b* gilt: $a \cdot b = 64$.

9.1 Ermittle die Zahl *b*, wenn gilt: $a = 16$.

9.2 Untersuche, ob die Gleichung für $a = 4$ und $b = 13$ ($a = 4$ und $b = 16$) erfüllt ist.

Varianten für AB III

10 Paul sagt: „Wenn ich in der Aufgabe $a \cdot b = 64$ für *a* die Zahl 3 einsetze, so finde ich keine Zahl für *b*, so dass für das Produkt $a \cdot b = 64$ gilt.

Beurteile Pauls Aussage.

11 Ein Rechteck hat einen Flächeninhalt von $A = 64\ \text{cm}^2$.

11.1 Zeichne ein solches Rechteck im Maßstab $1:2$.

11.2 Mathilde behauptet, dass jedes dieser Rechtecke den gleichen Umfang besitzt.

Untersuche, ob Mathilde Recht hat.

11.3 Das Rechteck soll nur natürliche Zahlen als Maßzahlen für die Seitenlängen haben.

Bestimme die Seitenlängen des Rechtecks, welches den kleinsten (größten) Umfang hat.

Interpretationshilfe zum sächsischen Lehrplan für den Umgang mit Termen und Gleichungen

Aufgrund der Lehrplanänderungen wurden die Tabellen für Klasse 5 und 6 2019 aktualisiert.

Kl	Inhalt	AB I	AB II	AB III
5	Termberechnung und vorteilhaftes Rechnen unter Anwendung der Rechengesetze	$3\cdot 5+2\cdot 6$; $3-(7-5)$; $63+56+7$; $2{,}4\cdot 6$; $24{,}5\cdot 1000$	$96-2^4$; $16:2^3$; $2{,}5\cdot 17\cdot 4$; $\frac{2}{3}$ von 27; $2{,}4:6$; $24{,}5:1\,000$; $59{,}4-0{,}83+12{,}9$; $(1{,}5+1{,}8+2{,}1):3$	$28+2^6:16$; $32-\left(8-2^3\right)$; $17\cdot 2+17\cdot 8$; $4-9+7$
	Gleichungen und Ungleichungen	Gleichungen und Ungleichungen inhaltlich lösen		
		$7+x=13$; $5\cdot a=0$; $b-6=2$	$2\cdot(a-5)=4$; $2^x=16$; $a\cdot b=64$, $3\cdot c<16$ für $c\in\mathbb{N}$	$2\cdot y+31=93$

6	Termberechnung und vorteilhaftes Rechnen unter Anwendung der Rechengesetze	$\frac{5}{9}+\frac{2}{9}$; $\frac{7}{12}+\frac{5}{6}$; $\frac{5}{12}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}$; $0{,}5\cdot\left(\frac{4}{5}-\frac{2}{15}\right)$; $6\cdot\frac{2}{3}-6\cdot\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}-0{,}3$; $\frac{9}{5}:\frac{1}{2}$; $\frac{3}{10}\cdot 4$; $3{,}6:0{,}4$; $7:\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{10}\right)$; $23-6:\frac{1}{3}$; $\frac{13}{6}+\frac{11}{15}$; $\frac{25}{7}\cdot\frac{14}{65}$; $5{,}2-3\cdot(3{,}1-2{,}7)+1{,}4$	$\frac{\frac{3}{4}}{2}$; $\frac{\frac{6}{11}}{\frac{3}{22}}$
	Gleichungen und Ungleichungen	Gleichungen und Ungleichungen inhaltlich lösen		
		$3{,}5+x=4{,}2$; $8=\frac{x}{4}$; $7=\frac{14}{x}$; $\frac{x}{6}=\frac{3}{18}$; $\frac{7}{5}-a=\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}-x=0{,}3$; $\frac{3}{4}\cdot x<\frac{3}{4}$; $x:2=\frac{2}{5}$; $\frac{12}{x}=\frac{15}{5}$; $\frac{9}{5}-a=1$	$2\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right)=6$; $\frac{24}{x+7}=\frac{6}{5}$

2017/2019

Interpretationshilfe zum sächsischen Lehrplan für den Umgang mit Termen und Gleichungen

KI	Inhalt	AB I	AB II	AB III
7	Termberechnung und vorteilhaftes Rechnen unter Anwendung der Rechengesetze	$-0{,}5\cdot(-12{,}4)$; $\frac{1}{2}:\left(-\frac{3}{8}\right)$; -2^5; $(-2)^5$; $-4\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}\right)\pm\frac{3}{4}$; $-0{,}2\cdot(-0{,}1)$; $\frac{13}{6}\pm\frac{11}{15}$; $\frac{3}{5}-\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{5}$; $-3:(-1{,}2)$; $-2\cdot 13{,}5\cdot(-5)$; $\frac{1}{4}-4\cdot\frac{1}{4}$; $2-\lvert -2\rvert$; $\frac{10-\sqrt{121}}{2}$	$\frac{\frac{1}{4}-\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2-1\right)}{\frac{1}{4}}$; $\frac{4\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2-1\right)}{2}$; $\left(\sqrt{225}+1\right)^2$
	Terme umformen	Summe (Differenz) von Termen, Produkt (Quotient) von Termen (Anwendung Distributivgesetz; höchstens ein Faktor ist eine Summe); Potenzieren und Quadratwurzelziehen		
		$2\cdot x-8+3\cdot x+4$; $2\cdot(x+2)$; $x^2+x^2+2\cdot x^2$	$10-(2\cdot x-8)$; $\frac{1}{2}\cdot\left(6\cdot x+\frac{3}{4}\right)$; $(2\cdot a)^2$; $2\cdot x+3\cdot x+5\cdot x^2$	$x\cdot(x+3)$; $\frac{\sqrt{144}-12\cdot x}{12}$
	Gleichungen	lineare Gleichungen, einfache Betragsgleichungen, Gleichungen vom Typ „Term1 $\cdot$ Term2 = 0“		
		$2\cdot x+4=8$; $(x-3)\cdot(x+4)=0$; $\lvert x\rvert=7$; $\frac{x}{20}=\frac{11}{100}$	$2\cdot x+4=8$, $(2\cdot x+4)\cdot(3\cdot x+1)=0$; $\lvert x-3\rvert=7$; $3\cdot a+4=2\cdot a-8$; $6\cdot x+17-2\cdot x=2\cdot x+1$; $-3\cdot(x+2)=18$; $3-(x+4)=5\cdot x$; $\frac{20}{a}=\frac{100}{11}$; $\frac{3}{b}+4=14$	$\frac{7}{3}\cdot x+\frac{3}{4}=-\frac{1}{10}-\frac{1}{6}\cdot x$; $\lvert 2\cdot x-3\rvert=7$
	Formeln umstellen	$u=a+b+c$ (nach c) $\rho=\frac{m}{V}$ (nach V)	$\frac{F_1}{l_1}=\frac{F_2}{l_2}$ (nach l_2)	$V=\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot h$ (nach a)

Interpretationshilfe zum sächsischen Lehrplan für den Umgang mit Termen und Gleichungen

Kl	Inhalt	AB I	AB II	AB III
8	Termberechnung	Trainieren bisher gelernter Fertigkeiten zur Termberechnung		
	Terme umformen	Summe · Summe; Klammern auflösen; Spezialfall Binomische Formeln (mithilfe der binomischen Formeln Klammern auflösen und Faktorisieren), Faktorisieren mit Distributivgesetz, Ausklammern (auch bei Potenzen)		
		$19\cdot a\cdot b-17\cdot a\cdot c-a\cdot b$; $3\cdot(4\cdot x+2\cdot y)$; $(2-a)^2$; $(a+2\cdot b)\cdot(a-2\cdot b)$	$2\cdot(x-5)^2$; $(x-3)\cdot(x+2)$ $15\cdot x\cdot y\cdot(3\cdot x+4\cdot x\cdot y)-3\cdot x^2\cdot y$; $\frac{3}{8\cdot x}\cdot\frac{x^2}{9}$	$\frac{x^3+x^2}{x^2}$; $\frac{x^2}{x^3+x^2}$; $\frac{3\cdot(x-4)^2}{4\cdot(x^2-8\cdot x+16)}$; $\frac{a^2-b^2}{a-b}$
	Gleichungen und LGS	Gleichungen mit Summe · Summe; einfache Bruchgleichungen (Quadrate entfallen beim Umformen); Gleichungen, die auf Term1 · Term2 = 0 führen; LGS		
		$-3\cdot(x+0{,}2)=x+1{,}8$; $0=-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{3}{5}$; $3-(x+4)=5\cdot x$; $\left\lvert\begin{array}{r} 3\cdot a+b=18 \\ b=a+2 \end{array}\right\rvert$	$(3\cdot x-2)\cdot(x+5)-3\cdot x^2=7$; $\left\lvert\begin{array}{l} -3\cdot x+4\cdot y=22 \\ \frac{1}{2}\cdot x+\frac{3}{4}\cdot y=2 \end{array}\right\rvert$	$x^2-3\cdot x=0$; $\frac{5}{a-1}=\frac{3}{a}$; $\left\lvert\begin{array}{l} 3\cdot x=5\cdot(y+0{,}6) \\ 5\cdot y+3=7\cdot x+8 \end{array}\right\rvert$
	Formeln umstellen	$u=2\cdot(a+b)$ oder $u=2\cdot a+2\cdot b$ (nach b)	$R=\rho\cdot\frac{l}{A}$ (nach l)	$A=\frac{a+c}{2}\cdot h$ (nach c)

9	Termberechnung	$5^6\cdot5^7$; $5\cdot x^5\cdot(-2\cdot x^4)$	$5\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$; $\left(\sqrt[5]{2}\right)^{-10}$	$\frac{1}{\left(-\left(10^3\cdot0{,}1\right)^2\right)^{-2}}$
	Rechengesetze anwenden bzw. neue Regeln Terme umformen	Potenzgesetze für rationale Exponenten; Umformung Potenz-Wurzel		
		$a^2\cdot a^4$; $a^p\cdot b^p$; $x^2:y^2$; $a^{\frac{2}{3}}:a^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[3]{x}$; $\frac{1}{x^2}$; $\left(\frac{b}{a}\right)^2$	$a^{n+1}\cdot a^{2-n}$; $\left(-\frac{2}{5}\cdot b\right)^2$; $\sqrt[3]{x}\cdot x$; $\sqrt[3]{z^6}$; $\frac{1}{3\cdot x^2}$; $\frac{3}{\sqrt[3]{b}}$; Umformungen wie $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(-\frac{2}{5}\cdot b^3\right)^2$; $\left(\frac{a^2\cdot b}{c}\right)^3:\frac{a}{c^2}$; $x^2\cdot x^4+\frac{x^8}{x^2}+\left(x^2\right)^3-3\cdot x^6$

Interpretationshilfe zum sächsischen Lehrplan für den Umgang mit Termen und Gleichungen

Kl	Inhalt	AB I	AB II	AB III
9	Gleichungen	Quadratische Gleichungen der Formen $x^2 = c$; $a \cdot x^2 + b \cdot x = 0$ (Ausklammern); $x^2 + p \cdot x + q = 0$ und $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ Lösungsformel für Normalform; einfache Wurzelgleichungen		
		$x^2 - \frac{9}{4} = 0$; $x^2 - 7 \cdot x = 0$; $x^2 + 6 \cdot x + 9 = 0$; $x^2 - 2 \cdot x - 3 = 0$; $\sqrt{x} + 1 = 13$	$x^2 + 3 \cdot x - 10 = 0$; $x^2 - x = \frac{3}{4}$; $3 \cdot x^2 + 12 \cdot x + 9 = 0$; $\sqrt{35 + x} = 9$	$0 = x^2 + 5 \cdot x - b$; $x^2 - 2 \cdot a \cdot x - 3 \cdot a^2 = 0$; $\sqrt{4 - x} + 4 = 3$
	Formeln umstellen	$A = \pi \cdot r^2$ (nach r); $a^2 + b^2 = c^2$ (nach a oder b)	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ (nach r)	$A_O = \pi \cdot r \cdot (r + s)$ (nach s)

Kl	Inhalt	AB I	AB II	AB III
10	Termberechnung	Umrechnen Grad-Bogenmaß für $\alpha = 0°$; $30°$; $45°$; $60°$; $90°$; $\sin\alpha$ für $\alpha = 0°$; $30°$; $90°$; $180°$; $\cos\alpha$ für $\alpha = 0°$; $60°$; $90°$; $180°$; $\log_2 8$; $\ln e$	$\log_{\frac{1}{2}} 16$; $3 \cdot \lg 0{,}001$; $\tan\alpha$ für $\alpha = 0°$; $45°$; $90°$	$\log_7 \sqrt{7}$; $\log_a \left(\frac{1}{a^n}\right)$ $a \in \mathbb{R} \wedge a > 0 \wedge a \neq 1$
	Terme umformen	Umformen Potenz-Logarithmus		
		$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$		
	Gleichungen	Exponentialgleichungen $a^x = b$ für $a = \frac{1}{2}, 2, 10, e$ mit Verknüpfungen, einfache Logarithmusgleichungen		
		$2^x = 32$; $10^x + 2 = 102$; $x = \log_2 8$; $\ln x = 1$	$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$; $\lg x = -3$; $3 \cdot e^x = 1 \rightarrow$ z.B.: $x = \ln \frac{1}{3}$	$2^{2 \cdot x - 1} = 1$; $2^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $\log_{\frac{1}{2}} x = -16$
	Formeln umstellen	$\frac{\alpha}{360°} = \frac{x}{2 \cdot \pi}$ (nach x); $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$ (nach b oder $\sin\beta$); $A = b \cdot c \cdot \sin\alpha$ (nach b)	$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$ (nach $\cos\alpha$)	$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ (nach R); $a = \frac{b+1}{b}$ (nach b)