**Interpretationshilfe zur Verwendung der Operatoren bei Nutzung eines Computeralgebrasystems (CAS) in Klassenstufe 11/12**

Ab dem Abiturjahrgang 2026 ist im Mathematikabitur ein Computeralgebrasystem (CAS) bzw. genauer ein MMS (modulares Mathematik-System) ein verbindliches Hilfsmittel.

Die im Fach Mathematik häufig vorkommenden Operatoren sind in den Materialien des IQB[1] wie folgt benannt; sie können durch Zusätze (z. B. „rechnerisch“ oder „grafisch“) konkretisiert werden:

| Operator | Erläuterung |
|---|---|
| angeben, nennen | Für die Angabe bzw. Nennung ist keine Begründung notwendig. |
| entscheiden | Für die Entscheidung ist keine Begründung notwendig. |
| beurteilen | Das zu fällende Urteil ist zu begründen. |
| beschreiben | Bei einer Beschreibung kommt einer sprachlich angemessenen Formulierung und ggf. einer korrekten Verwendung der Fachsprache besondere Bedeutung zu. Eine Begründung für die Beschreibung ist nicht notwendig. |
| erläutern | Die Erläuterung liefert Informationen, mithilfe derer sich z. B. das Zustandekommen einer grafischen Darstellung oder ein mathematisches Vorgehen nachvollziehen lassen. |
| deuten, interpretieren | Die Deutung bzw. Interpretation stellt einen Zusammenhang her z. B. zwischen einer grafischen Darstellung, einem Term oder dem Ergebnis einer Rechnung und einem vorgegebenen Sachzusammenhang. |
| begründen, nachweisen, zeigen | Aussagen oder Sachverhalte sind durch logisches Schließen zu bestätigen. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen. |
| berechnen | Die Berechnung ist ausgehend von einem Ansatz darzustellen. |
| bestimmen, ermitteln | Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen. |
| untersuchen | Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen. |
| grafisch dar- stellen, zeichnen | Die grafische Darstellung bzw. Zeichnung ist möglichst genau anzufertigen. |
| skizzieren | Die Skizze ist so anzufertigen, dass sie das im betrachteten Zusammenhang Wesentliche grafisch beschreibt. |

Für eine langfristige Vorbereitung oder ergänzende Fortbildung der Kollegen haben die Fachberater für Mathematik an Gymnasien in Sachsen 2021 bereits eine Interpretationshilfe zur Verwendung der Operatoren bei Nutzung eines CAS für Klasse 8 erstellt. Dieser folgte ein Jahr später eine entsprechende Hilfe für die Klassen 9 bzw. 10 mit Beispielaufgaben schwerpunktmäßig für die Leitideen Messen sowie Raum und Form. Nun soll diese Reihe fortgesetzt werden mit einigen typischen Abituraufgaben und ihrer Lösungsdarstellung mit dem CAS als Hilfsmittel. Wir beschränken uns auf das Stoffgebiet Analysis, da hier der Einsatz des CAS wohl unbestritten die größten Vorteile bietet.

Die Fachberater Sachsens für Mathematik an Gymnasien

[1]Quelle der Tabelle: https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/dokumente/mathematik

**Operator: angeben, nennen**

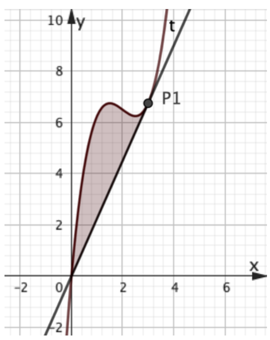
Für die Angabe bzw. Nennung ist keine Begründung notwendig.

| | |
|---|---|
| Aufgabenstellung Beispiel 1 | Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g_t$ mit $g_t(x) = (x-3)\cdot\left(x^2 - t\cdot x - \frac{t}{2}\right) \quad (t\in\mathbb{R})$.<br><br>**Geben Sie** die Koordinaten der beiden Punkte **an**, durch die alle Graphen der Schar verlaufen. |
| EH | $(3\,\vert\,0)$ , $\left(-\frac{1}{2}\,\middle\vert\,-\frac{7}{8}\right)$ |

| | |
|---|---|
| Aufgabenstellung Beispiel 2 | Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $s$ mit $s(x) = 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot x\right)+1$.<br>**Geben Sie** die Koordinaten und die Art zweier direkt aufeinanderfolgender Extrempunkte des Graphen von $s$ **an**. |
| EH | Hochpunkt: $(2\,\vert\,3)$, Tiefpunkt: $(6\,\vert\,-1)$ |

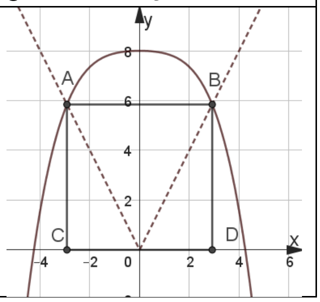
**Operator: berechnen**

Die Berechnung ist ausgehend von einem Ansatz darzustellen.

| | |
|---|---|
| Aufgabenstellung Beispiel 1 | An den Graphen der Funktion $f$ mit<br>$f(x) = x^3 - 6\cdot x^2 + \frac{45}{4}\cdot x \quad (x\in\mathbb{R})$ wird im Punkt $P_1(u\,\vert\,f(u))$<br>$(u>0)$ eine Tangente gelegt, welche auch durch den Punkt<br>$P_2(0\,\vert\,0)$ verläuft.<br>**Berechnen Sie** den Inhalt der Fläche, die von dieser Tangente und dem Graphen von $f$ im I. Quadranten vollständig begrenzt wird. |
| EH | Die Tangente $t$ hat den Anstieg $f'(u)$.<br>Wegen $P_2 \in t$ ergibt sich<br>$f'(u) = \frac{f(u)}{u} \Leftrightarrow u = 3$ und damit<br>$P_1\left(3\,\middle\vert\,\frac{27}{4}\right)$. Man erhält für die Tangente<br>$t: y = \frac{9}{4}\cdot x$.<br>$A = \int_0^3 \left(f(x) - \frac{9}{4}\cdot x\right)\mathrm{d}x = \frac{27}{4}$<br><br> |

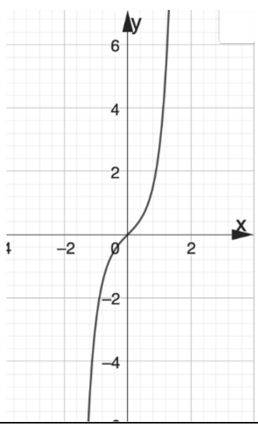
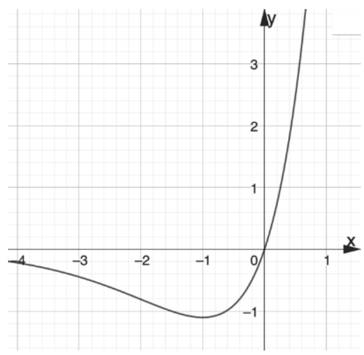
**Operator: bestimmen/ermitteln**

Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.

| | |
|---|---|
| Aufgabenstellung<br>Beispiel | Die Profillinie des Längsschnitts eines Bergwerksstollens wird für $-4 \le x \le 4$ modellhaft durch den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f$ mit $f(x) = -0{,}02 \cdot x^4 - 0{,}08 \cdot x^2 + 8{,}00$ dargestellt. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die $x$-Achse die Horizontale; eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Realität.<br>Ein Sicherungsgerüst hat im Längsschnitt die Form eines Quadrates.<br>**Bestimmen Sie** die größtmögliche Seitenlänge dieses Quadrates. |
| EH | Mit dem Koordinatenursprung $O$ gilt für das Quadrat $ACDB$ $\frac{\lvert\overline{BD}\rvert}{\lvert\overline{DO}\rvert} = 2$. Aus $2x = f(x)$ erhält man $x_B \approx 2{,}93$ und $y_B \approx 5{,}85$<br>größtmögliche Seitenlänge: etwa $5{,}85\,\mathrm{m}$   |

**Operator: entscheiden**

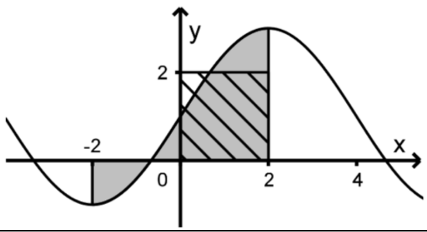
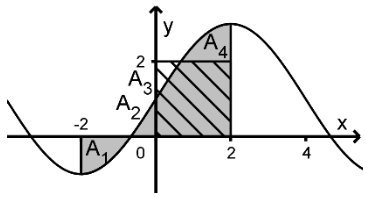
Für die Entscheidung ist keine Begründung notwendig.
Kommentar: Wenn eine Begründung erwünscht ist, muss dies explizit gefordert werden.

| | |
|---|---|
| Aufgabenstellung<br>Beispiel<br>(ohne HM) | Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f$, $g$ und $h$ durch $f: x \mapsto x \cdot e^{(x^2)}$, $g: x \mapsto 3x \cdot e^x$ und $h: x \mapsto -e^x + 1$.<br>**Entscheiden Sie**, welche der drei Funktionen im Folgenden nicht grafisch dargestellt ist. **Begründen Sie** Ihre Entscheidung.<br>    |
| EH | Der Graph von $h$ ist nicht dargestellt.<br><br>Wegen $h'(x) = -e^x < 0$ ist $h$ monoton fallend, was bei keinem der dargestellten Graphen der Fall ist. |

**Operator: beurteilen**
Das zu fällende Urteil ist zu begründen.

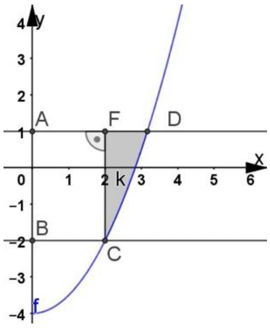
| | |
|---|---|
| Aufgabenstellung Beispiel | **Beurteilen Sie** die folgende Aussage:<br>*Rotieren zwei Flächenstücke gleichen Inhalts um die x-Achse, so stimmen die Volumina der beiden entstehenden Körper überein.* |
| EH | Die Aussage ist falsch.<br>Begründung: Das Rechteck 1 mit den Eckpunkten $(0\,\vert\,0)$, $(2\,\vert\,0)$, $(2\,\vert\,1)$ und $(0\,\vert\,1)$ und das Rechteck 2 mit den Eckpunkten $(0\,\vert\,0)$, $(1\,\vert\,0)$, $(1\,\vert\,2)$ und $(0\,\vert\,2)$ haben den gleichen Flächeninhalt 2. Die Volumina der zugehörigen Rotationskörper sind mit $1^2 \cdot \pi \cdot 2$ bzw. $2^2 \cdot \pi \cdot 1$ jedoch verschieden. |

**Operator: beschreiben**
Bei einer Beschreibung kommt einer sprachlich angemessenen Formulierung und ggf. einer korrekten Verwendung der Fachsprache besondere Bedeutung zu. Eine Begründung für die Beschreibung ist nicht notwendig.

| | |
|---|---|
| Aufgabenstellung Beispiel | Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion mit $f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot x\right) + 1$. Es gilt $\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 4$.<br>**Beschreiben Sie** mit Hilfe der nebenstehenden Abbildung, wie man zu diesem Wert mit geometrischen Überlegungen kommen kann.<br><br> |
| EH | Der Graph von $f$ ist symmetrisch bezüglich des Punkts $(0\,\vert\,1)$. Damit haben die Flächenstücke $A_1$ und $A_4$ ebenso den gleichen Inhalt wie die Flächenstücke $A_2$ und $A_3$.<br><br><br>Aufgrund der Lage dieser Flächenstücke bezüglich der *x*-Achse und bezüglich des abgebildeten Quadrats stimmt der Wert des Terms mit dem Flächeninhalt des Quadrats überein, ist also $2^2 = 4$. |

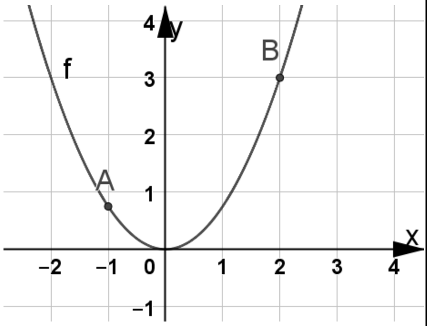
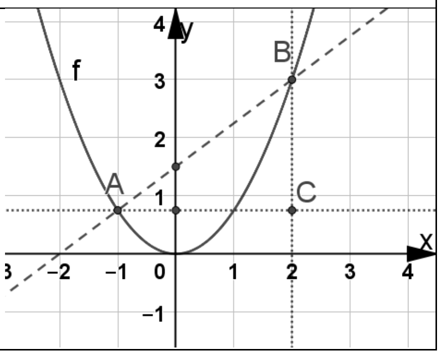
**Operator: erläutern**
Die Erläuterung liefert Informationen, mithilfe derer sich z. B. das Zustandekommen einer grafischen Darstellung oder ein mathematisches Vorgehen nachvollziehen lassen.

| | |
|---|---|
| Aufgabenstellung Beispiel | Der Graph der in $\mathbb{R}_0^+$ definierten Funktion $f$ mit $f: x \mapsto \frac{1}{2} \cdot x^2 - 4$, die $y$-Achse sowie die beiden Geraden $y = -2$ und $y = 1$ begrenzen ein Flächenstück vollständig.<br>**Erläutern Sie** anhand einer Skizze, dass der Inhalt dieser Fläche mit dem folgenden Term berechnet werden kann: |

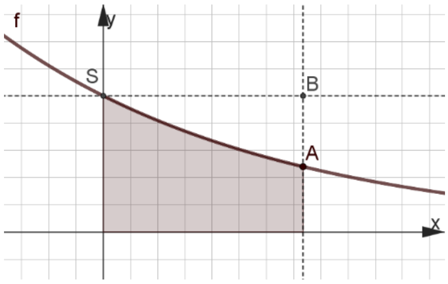
| | |
|---|---|
| | $2 \cdot 3 + \int_{2}^{\sqrt{10}} (1 - f(x))\, dx$ |
| EH | Der gesuchte Flächeninhalt wird als Summe des Inhaltes des Rechtecks *ABCF* und des markierten (krummlinig begrenzten) Flächenstücks *CDF* dargestellt. Der erste Summand entspricht dem Inhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen $\lvert\overline{AF}\rvert = x_C = 2$ sowie $\lvert\overline{AB}\rvert = 3$.<br><br><br>Der zweite Summand wird als Inhalt der Fläche zwischen den zwei Funktionsgraphen $y = 1$ bzw. $y = f(x)$ und daher mit dem Integral über die Differenzfunktion dargestellt. Dabei ist die untere Grenze $x = 2$ und die obere Grenze entspricht der Schnittstelle $x = \sqrt{10}$ der beiden Funktionsgraphen. |

**Operator: deuten/interpretieren**

Die Deutung bzw. Interpretation stellt einen Zusammenhang her z. B. zwischen einer grafischen Darstellung, einem Term oder dem Ergebnis einer Rechnung und einem vorgegebenen Sachzusammenhang.

| | |
|---|---|
| Aufgabenstellung Beispiel | Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \mapsto \frac{3}{4} \cdot x^2$.<br><br>**Interpretieren Sie** den Term $\dfrac{\frac{3}{4} \cdot 2^2 - \frac{3}{4} \cdot (-1)^2}{2 - (-1)}$ anhand der Abbildung.<br><br> |
| EH | Der Term beschreibt den Anstieg der Gerade durch $A(-1 \mid f(-1))$ und $B(2 \mid f(2))$. Dies entspricht dem mittleren Anstieg von $f$ im Intervall $[-1; 2]$.<br><br> |

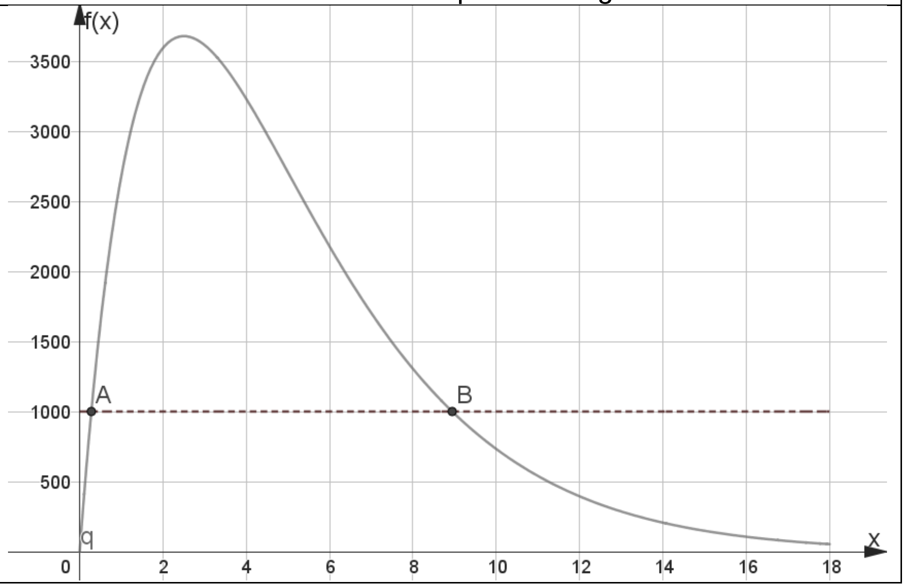
**Operator: begründen/nachweisen/zeigen**
Aussagen oder Sachverhalte sind durch logisches Schließen zu bestätigen. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.

| | |
|---|---|
| Aufgabenstellung Beispiel | Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto e^{-x}$.<br>Auf dem Graphen von $f$ liegt ein Punkt $A(x_A \mid y_A)$ mit $x_A > 0$. Die Parallele zur $y$-Achse durch $A$, die $x$-Achse, die $y$-Achse und der Graph von $f$ begrenzen ein Flächenstück. Die Parallele zur $x$-Achse durch den Schnittpunkt $S$ des Graphen von $f$ mit der $y$-Achse schneidet die o. g. Parallele zur $y$-Achse im Punkt $B$ (siehe Abbildung).<br><br>**Zeigen Sie**, dass die Maßzahl des Inhaltes dieses Flächenstücks gleich der Maßzahl der Länge der Strecke $\overline{AB}$ ist. |
| EH | Die Maßzahl $F$ des Flächeninhalts $F = \int_0^{x_A} e^{-x} dx = 1 - e^{-x_A}$.<br>$\left\lvert \overline{AB} \right\rvert = f(0) - f(x_A) = 1 - e^{-x_A}$. |

**Operator: untersuchen**
Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.

| | |
|---|---|
| Aufgabenstellung Beispiel | Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f$ mit<br>$f(x) = -\frac{1}{640} \cdot x^4 + \frac{1}{40} \cdot x^3 - \frac{9}{80} \cdot x^2 + \frac{1}{5} \cdot x + 3$.<br>**Untersuchen Sie**, ob die Tangente an den Graphen von $f$ im Punkt $P\left(0{,}5 \middle\vert f(0{,}5)\right)$ parallel zu zwei weiteren Tangenten an den Graphen von $f$ ist. |
| EH | Die Gleichung $f'(x) = f'(0{,}5)$ hat genau drei Lösungen, darunter $x = 0{,}5$. Daher gibt es genau drei Stellen mit Tangentenanstiegen, die $f'(0{,}5)$ entsprechen.<br>Die Tangente an $f$ in $P$ ist parallel zu zwei weiteren Tangenten an den Graphen von $f$, da alle Tangenten verschiedene Achsenabschnitte haben. |

**Operator: grafisch darstellen; zeichnen**
Die grafische Darstellung bzw. Zeichnung ist möglichst genau anzufertigen.

| | |
|---|---|
| Aufgabenstellung Beispiel | Ein Unternehmen verkauft Fitnessarmbänder. Die momentane Änderungsrate des Absatzes kann modellhaft mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \mapsto 4000 \cdot x \cdot e^{-0{,}4 \cdot x}$ beschrieben werden. Dabei ist $x$ die seit der Produkteinführung vergangene Zeit in Monaten und $f(x)$ die momentane Änderungsrate des Absatzes in Stück pro Monat.<br><br>**Zeichnen Sie** den Graphen von $f$ für $0 \leq x \leq 18$ und diejenigen Punkte des Graphen, die zu einer momentanen Änderungsrate des Absatzes in Höhe von 1000 Stück pro Monat gehören. |
| EH |  |

**Operator: skizzieren**
Die Skizze ist so anzufertigen, dass sie das im betrachteten Zusammenhang Wesentliche grafisch beschreibt.

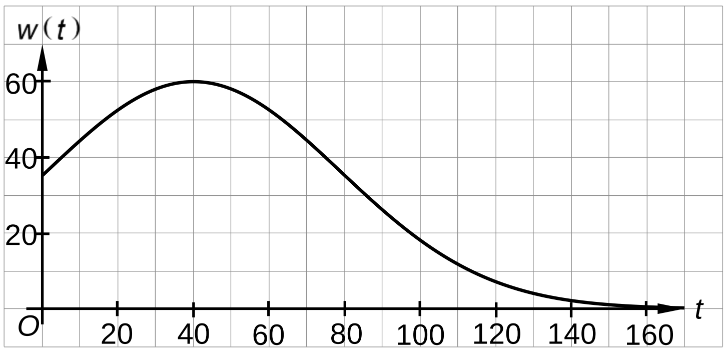
<table>
<tr>
<td>Aufgabenstellung<br>Beispiel</td>
<td>

Auf einer Waldfläche wurden Fichten gepflanzt. Alle Fichten hatten zum Zeitpunkt der Pflanzung eine Höhe von 50 cm.

Betrachtet wird die Wachstumsrate der Höhe der Fichten in Abhängigkeit von der Zeit. Diese Wachstumsrate wird für $t \geq 0$ modellhaft durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $w$ mit $w(t) = 60 \cdot e^{-\frac{(t-40)^2}{3000}}$ beschrieben.

Dabei gilt:
$t$ … seit der Pflanzung vergangene Zeit in Jahren
$w(t)$ … Wachstumsrate zur Zeit $t$ in Zentimeter pro Jahr

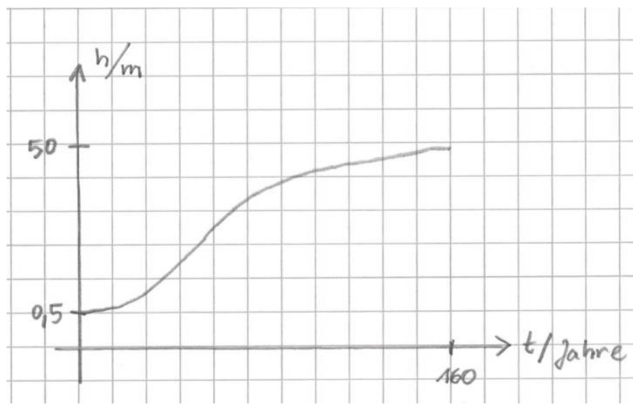
Die Abbildung zeigt den Graphen von $w$ für $0 \leq t \leq 160$.




Eine Funktion beschreibt die Höhe der Fichten in Abhängigkeit von der Zeit in den ersten 160 Jahren nach der Pflanzung.

**Skizzieren Sie** den Graphen dieser Funktion.

</td>
</tr>
<tr>
<td>EH</td>
<td>




</td>
</tr>
</table>