Interpretationshilfe zur Verwendung der Operatoren bei Nutzung eines Computeralgebrasystems (CAS) in Klassenstufe 8 ab dem Schuljahr 2021/22

Das Sächsische Staatsministerium für Kultus hat im September 2020 die Schulleitungen und Schulträger darüber informiert, dass ab dem Schuljahr 2021/22 im Mathematikunterricht **ab Klasse 8**[1] ein Computeralgebrasystem (CAS) verbindlich einzusetzen ist.

Das bedeutet, dass ab der BLF 2024 und dem Mathematikabitur 2026 als elektronisches Hilfsmittel ausschließlich ein CAS genutzt werden kann.

Die im Fach Mathematik häufig vorkommenden Operatoren sind in den Materialien des IQB[2] wie folgt benannt; sie können durch Zusätze (z. B. „rechnerisch" oder „grafisch") konkretisiert werden:

Operator	Erläuterung
angeben, nennen	Für die Angabe bzw. Nennung ist keine Begründung notwendig.
entscheiden	Für die Entscheidung ist keine Begründung notwendig.
beurteilen	Das zu fällende Urteil ist zu begründen.
beschreiben	Bei einer Beschreibung kommt einer sprachlich angemessenen Formulierung und ggf. einer korrekten Verwendung der Fachsprache besondere Bedeutung zu. Eine Begründung für die Beschreibung ist nicht notwendig.
erläutern	Die Erläuterung liefert Informationen, mithilfe derer sich z. B. das Zustandekommen einer grafischen Darstellung oder ein mathematisches Vorgehen nachvollziehen lassen.
deuten, interpretieren	Die Deutung bzw. Interpretation stellt einen Zusammenhang her z. B. zwischen einer grafischen Darstellung, einem Term oder dem Ergebnis einer Rechnung und einem vorgegebenen Sachzusammenhang.
begründen, nachweisen, zeigen	Aussagen oder Sachverhalte sind durch logisches Schließen zu bestätigen. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
berechnen	Die Berechnung ist ausgehend von einem Ansatz darzustellen.
bestimmen, ermitteln	Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
untersuchen	Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
grafisch darstellen, zeichnen	Die grafische Darstellung bzw. Zeichnung ist möglichst genau anzufertigen.
skizzieren	Die Skizze ist so anzufertigen, dass sie das im betrachteten Zusammenhang Wesentliche grafisch beschreibt.

Damit die Schüler das Hilfsmittel CAS effizient nutzen, sollte dessen Einsatz auch bei der Darstellung von Lösungswegen in Abhängigkeit von den Operatoren im Unterricht von Beginn an trainiert und in Leistungsüberprüfungen regelmäßig kontrolliert werden.

Für eine langfristige Vorbereitung oder ergänzende Fortbildung der Kollegen haben die Fachberater für Mathematik an Gymnasien in Sachsen die folgenden Beispielaufgaben zu linearen Funktionen aus dem Lernbereich 3 der Klassenstufe 8 zusammengestellt.

Die Erwartungsbilder sollen die Unterschiede in den Lösungswegen ohne Verwendung von Hilfsmitteln und mit Verwendung eines CAS verdeutlichen. Das Erwartungsbild stellt für jede Aufgabe eine mögliche Lösungsvariante dar.

Diese Handreichung wird mit entsprechenden Beispielen aus höheren Klassenstufen, insbesondere mit der Darstellung von Lösungswegen in den Klassen 11 und 12, fortgesetzt.

Die Fachberater Sachsens für Mathematik an Gymnasien März 2021

[1] Bis zum Schuljahr 2024/25 werden GTR mit und ohne CAS bzw. CAS auf einer anderen Plattform parallel verwendet, da in höheren Klassen das Hilfsmittel bereits gewählt und eingeführt wurde.
[2] Quelle der Tabelle: https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/dokumente/mathematik

Operator: angeben, nennen
Für die Angabe bzw. Nennung ist keine Begründung notwendig.

Aufgabenstellung Beispiel 1	**Gib** die Nullstelle x_N der Funktion f mit $y = f(x) = 1{,}5 \cdot x - 7 \ (x \in \mathbb{Q})$ **an**.
EB	$x_N = \frac{14}{3}$

Aufgabenstellung Beispiel 2 (in Verbindung mit einer Begründung)	**Gib** eine Gleichung einer monoton fallenden linearen Funktion g **an**, deren Graph den Graphen der Funktion f mit $f(x) = -\frac{3}{8} \cdot x + \frac{5}{8}$ $(x \in \mathbb{Q})$ im Punkt $P\left(0 \mid \frac{5}{8}\right)$ schneidet. **Begründe** deine Angabe.
EB	$g(x) = -2 \cdot x + \frac{5}{8}$ Begründung: $g(0) = \frac{5}{8}$ Weil g monoton fallend ist, muss der Anstieg negativ aber ungleich $-\frac{3}{8}$ sein, da sich die Graphen schneiden sollen.

Operator: berechnen
Die Berechnung ist ausgehend von einem Ansatz darzustellen.

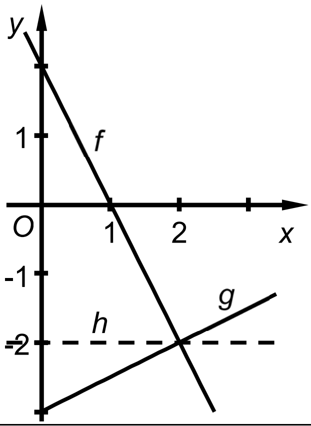
Aufgabenstellung Beispiel 1	**Berechne** die Stelle, an der die Funktion f mit $f(x) = 1{,}5 \cdot x - 7$ $(x \in \mathbb{Q})$ den Funktionswert -3 hat.
EB ohne Hilfsmittel	$-3 = 1{,}5 \cdot x - 7 \Leftrightarrow 4 = 1{,}5 \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$
EB mit CAS	$f(x) = -3 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$

Aufgabenstellung Beispiel 2	Gegeben sind zwei in $\mathbb{Q}$ definierte lineare Funktionen f und g. Die Funktion f hat den Anstieg 7; ihr Graph schneidet die y-Achse im Punkt $(0 \mid 6)$. Die Funktion g hat die Gleichung $g(x) = 4 \cdot x - 3$. **Berechne** die Koordinaten des Schnittpunktes S der Graphen dieser beiden Funktionen.
EB ohne Hilfsmittel	$f(x) = 7 \cdot x + 6$ $7 \cdot x + 6 = 4 \cdot x - 3 \Leftrightarrow 3 \cdot x = -9 \Leftrightarrow x = -3$; $y = 4 \cdot (-3) - 3 = -15$ $S(-3 \mid -15)$
EB mit CAS	$f(x) = 7 \cdot x + 6$ $f(x) = g(x) \Rightarrow S(-3 \mid -15)$

Operator: bestimmen/ermitteln

Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.

Aufgabenstellung Beispiel 1	Die lineare Funktion f hat den Anstieg a mit $a \in \mathbb{Q}$; ihr Graph schneidet die y-Achse im Punkt $(0\|6)$. Die Funktion g hat die Gleichung $g(x) = 4 \cdot x - 3 \ (x \in \mathbb{Q})$. **Bestimme** die x-Koordinate des Schnittpunktes der Graphen von f und g in Abhängigkeit von a.
EB ohne Hilfsmittel	$a \cdot x + 6 = 4 \cdot x - 3 \Leftrightarrow a \cdot x - 4 \cdot x = -9 \Leftrightarrow x \cdot (a - 4) = -9$ Für $a \neq 4$ gilt $x = \frac{-9}{a-4}$, für $a = 4$ existiert kein Schnittpunkt.
EB mit CAS	$f(x) = a \cdot x + 6$ $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{-9}{a-4}$ und $a \neq 4$ Für $a \neq 4$ gilt $x = \frac{-9}{a-4}$, für $a = 4$ existiert kein Schnittpunkt.

Aufgabenstellung Beispiel 2 (mit einem Zusatz)	Gegeben sind die in $\mathbb{Q}$ definierten linearen Funktionen f und g mit $f(x) = -2 \cdot x + 2$ bzw. $g(x) = \frac{1}{2} \cdot x - 3$. Weiterhin ist für jede rationale Zahl a die Gerade h mit der Gleichung $y = a$ gegeben. **Bestimme graphisch** diejenige Zahl a, für welche die Graphen von f und g sowie die Gerade h genau einen gemeinsamen Punkt haben.
EB ohne Hilfsmittel	 Für $a = -2$ haben die Graphen von f und g sowie die Gerade h genau einen gemeinsamen Punkt.
EB mit CAS	Koordinaten des Schnittpunktes der Graphen von f und g: $S(2\|-2)$ Für $a = -2$ haben die Graphen von f und g sowie die Gerade h genau einen gemeinsamen Punkt.

Operator: untersuchen

Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.

<table>
<tr><td>Aufgabenstellung
Beispiel 1
(für Arbeit ohne Hilfsmittel)</td><td>Eine Druckerei macht für Fotobücher folgende Angebote:
Angebot 1: 10,00 € Grundgebühr und 50 ct pro Seite
Angebot 2: 0,75 € pro Seite
Untersuche, für welche Seitenanzahlen das Angebot 1 kostengünstiger als das Angebot 2 ist.</td></tr>
<tr><td>EB ohne Hilfsmittel</td><td>Variante 1 (mithilfe von Gleichungen und Ungleichungen):
x – Anzahl der Seiten und $x \in \mathbb{N}$
$f_1(x) = 10 + 0{,}5 \cdot x$ und $f_2(x) = 0{,}75 \cdot x$
Untersuchung, für wie viele Seiten die Angebote gleich viel kosten:
$10 + 0{,}5 \cdot x = 0{,}75 \cdot x \Leftrightarrow 10 = 0{,}25 \cdot x \Leftrightarrow x = 40$
$f_1(41) < f_2(41)$
Das Angebot 1 ist ab 41 Seiten kostengünstiger.

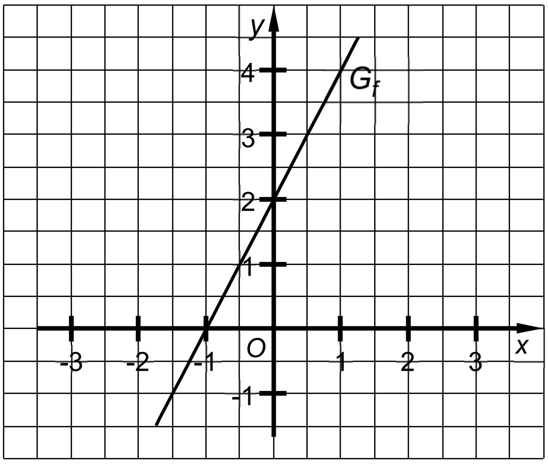
Variante 2 (systematisches Probieren):
<table>
<tr><th>Anzahl der Seiten</th><th>Kosten Angebot 1 in €</th><th>Kosten Angebot 2 in €</th><th>Angebot 1 günstiger?</th></tr>
<tr><td>20</td><td>20</td><td>15</td><td>nein</td></tr>
<tr><td>30</td><td>25</td><td>22,5</td><td>nein</td></tr>
<tr><td>40</td><td>30</td><td>30</td><td>nein</td></tr>
<tr><td>41</td><td>30,5</td><td>30,75</td><td>ja</td></tr>
</table>
Das Angebot 1 ist ab 41 Seiten kostengünstiger.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Aufgabenstellung
Beispiel 2
(nur für Arbeit mit CAS)</td><td>Eine Druckerei macht für Fotobücher folgende Angebote.
Angebot 1: 9,99 € Grundgebühr und 50 ct pro Seite
Angebot 2: 0,79 € pro Seite, das Buch muss mindestens 20 Seiten haben
Untersuche, für welche Seitenanzahlen das Angebot 1 kostengünstiger als das Angebot 2 ist.</td></tr>
<tr><td>EB mit CAS</td><td>Variante 1 (rechnerisch mit Gleichungen und Ungleichungen):
x – Anzahl der Seiten und $x \in \mathbb{N}$
$f_1(x) = 9{,}99 + 0{,}5 \cdot x$ und $f_2(x) = 0{,}79 \cdot x \quad (x \geq 20)$
Untersuchung, für wie viele Seiten die Angebote gleich viel kosten:
$f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow x \approx 34{,}4$
$f_1(35) < f_2(35)$
Das Angebot 1 ist ab 35 Seiten kostengünstiger.

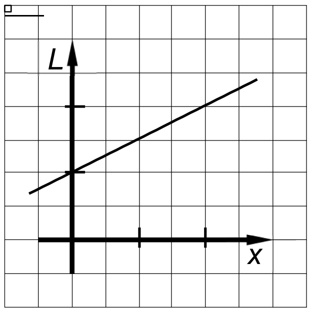
Variante 2 (graphische Lösung):
x – Anzahl der Seiten und $x \in \mathbb{N}$
$f_1(x) = 9{,}99 + 0{,}5 \cdot x$ und $f_2(x) = 0{,}79 \cdot x \quad (x \geq 20)$
Die Graphen von f_1 und f_2 schneiden einander für $x \approx 34{,}4$; der Graph von f_1 verläuft für $x \geq 35$ unterhalb des Graphen von f_2.
Das Angebot 1 ist ab 35 Seiten kostengünstiger.

Variante 3 (systematisches Probieren mit Wertetabellen):
<table>
<tr><th>Anzahl der Seiten</th><th>Kosten Angebot 1 in €</th><th>Kosten Angebot 2 in €</th><th>Angebot 1 günstiger?</th></tr>
<tr><td>34</td><td>26,99</td><td>26,86</td><td>nein</td></tr>
<tr><td>35</td><td>27,49</td><td>27,65</td><td>ja</td></tr>
</table>
Das Angebot 1 ist ab 35 Seiten kostengünstiger, da die Kosten für Angebot 1 langsamer als bei Angebot 2 steigen.</td></tr>
</table>

Operator: entscheiden
Für die Entscheidung ist keine Begründung notwendig.

Aufgabenstellung		In der Abbildung ist der Graph G_f einer Funktion f dargestellt. **Entscheide**, welche Funktionsgleichung zu f gehört: (1) $f(x) = 2 \cdot x - 1$ (2) $f(x) = x + 2$ (3) $f(x) = 2 \cdot x + 2$ (4) $f(x) = -x + 2$
EB	(3)	

Operator: beurteilen
Das zu fällende Urteil ist zu begründen.

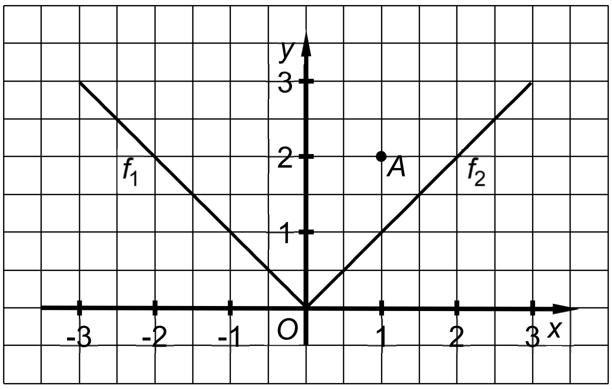
Aufgabenstellung	Die Leihgebühr für einen E-Scooter setzt sich aus einem Grundpreis g und einem Preis p pro Stunde zusammen. **Beurteile**, ob nebenstehende Abbildung für die Darstellung des Sachverhaltes geeignet ist.	
EB	Ja, die Abbildung ist im Wesentlichen geeignet. Begründung: Es besteht eine lineare Abhängigkeit zwischen der Leihgebühr L und der Ausleihzeit x in Stunden. Dabei bestimmt g den Schnittpunkt des Graphen mit der L-Achse und p dessen Anstieg. Der Graph dürfte allerdings nur im ersten Quadranten verlaufen. Es gilt: $L(x) = p \cdot x + g$ und $x > 0$. Hinweis: In der Aufgabe wird vereinfacht davon ausgegangen, dass die Leihgebühr L mit zunehmender Ausleihzeit x „kontinuierlich wächst“.	

Operator: beschreiben
Bei einer Beschreibung kommt einer sprachlich angemessenen Formulierung und ggf. einer korrekten Verwendung der Fachsprache besondere Bedeutung zu. Eine Begründung für die Beschreibung ist nicht notwendig.

Aufgabenstellung	Gegeben ist eine Funktion mit der Gleichung $y = \frac{2}{3} \cdot x - 4 \ (x \in \mathbb{Q})$. **Beschreibe**, wie du eine möglichst exakte Darstellung des Funktionsgraphen erhalten kannst.
EB ohne Hilfsmittel	Variante 1 (mithilfe eines Anstiegsdreiecks): Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt $S(0 \mid -4)$. Von S aus gehe ich 3 Einheiten in positive x-Richtung und 2 Einheiten in positive y-Richtung zu einem Punkt P. Der Graph ist die Gerade durch S und P. Variante 2 (mithilfe zweier Punkte): Der Graph verläuft durch den Punkt $S(0 \mid -4)$. Ich berechne die Koordinaten eines zweiten Punktes, wobei ich dessen x-Koordinate betragsmäßig möglichst groß wähle. Zum Beispiel ergibt sich für $x = 6$ der Punkt $T(6 \mid 0)$. Der Graph ist die Gerade durch S und T.

Operator: erläutern
Die Erläuterung liefert Informationen, mithilfe derer sich z. B. das Zustandekommen einer grafischen Darstellung oder ein mathematisches Vorgehen nachvollziehen lassen.

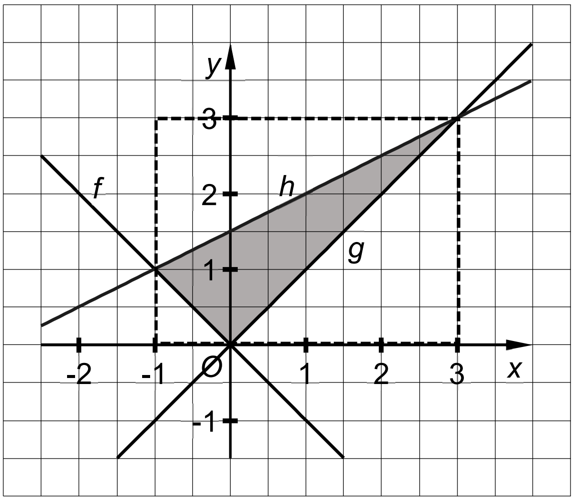
<table>
<tr><td>Aufgabenstellung</td><td>Die Abbildung zeigt jeweils einen Teil der Graphen der Funktionen f_1 mit $y = -x \ (x \in \mathbb{Q};\, x < 0)$ und f_2 mit $y = x \ (x \in \mathbb{Q};\, x \geq 0)$ sowie den Punkt $A(1 \mid 2)$.

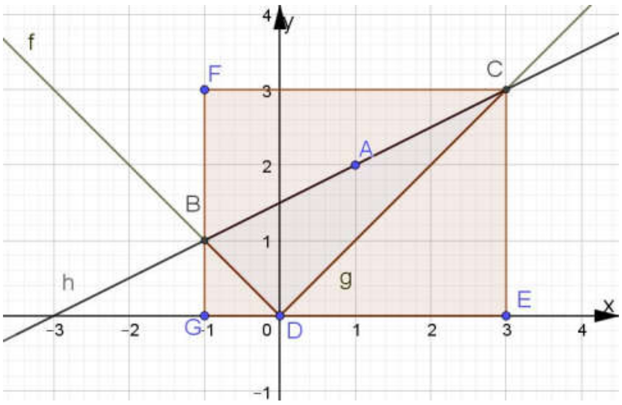


Es gibt Geraden durch A, die mit den Graphen von f_1 und f_2 jeweils ein Dreieck bilden.

Erläutere dein Vorgehen, um die Steigungen derartiger Geraden zu ermitteln.</td></tr>
<tr><td>EB</td><td>Damit ein Dreieck entsteht, müssten die Graphen von f_1 und f_2 mit der entsprechenden Gerade g durch A jeweils genau einen Schnittpunkt haben.
Falls für die Steigung m der Gerade g gilt: $m = \pm 1$, ist g parallel zum Graphen von f_1 oder von f_2; es entsteht kein Dreieck.
Falls die Steigung größer als 1 oder kleiner als -1 ist, entsteht nur mit einem der beiden Graphen von f_1 oder f_2 ein Schnittpunkt, also auch kein Dreieck.
Falls m zwischen -1 und 1 liegt, schneidet g beide Graphen.
Das heißt: Ein Dreieck entsteht für $-1 < m < 1$ und $m \in \mathbb{Q}$.</td></tr>
</table>

Operator: deuten/interpretieren
Die Deutung bzw. Interpretation stellt einen Zusammenhang her z. B. zwischen einer grafischen Darstellung, einem Term oder dem Ergebnis einer Rechnung und einem vorgegebenen Sachzusammenhang.

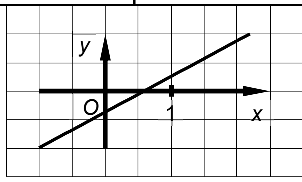
<table>
<tr><td>Aufgabenstellung</td><td>Die Graphen der in $\mathbb{Q}$ definierten Funktionen f mit $f(x)=-x$, g mit $g(x)=x$ sowie h mit $h(x)=\frac{1}{2}\cdot x+\frac{3}{2}$ begrenzen ein Dreieck (siehe Abbildung).


Mathilde berechnet den Flächeninhalt dieses Dreiecks mit folgendem Term: $4\cdot 3-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4$.
Deute den Term im Zusammenhang mit der Flächenberechnung.
Differenzierungspotential: Das Rechteck als Hilfestellung weglassen oder das Koordinatensystem nicht angeben und als erste Teilaufgabe einzeichnen lassen.</td></tr>
<tr><td>EB</td><td>Das Rechteck GECF ist das kleinste achsenparallele Rechteck, welches das zu berechnende Dreieck BDC „umschließt“.
Um den Flächeninhalt dieses Dreiecks zu berechnen, werden von dem des Rechtecks GECF die Flächeninhalte der drei rechtwinkligen Teildreiecke BGD, DEC und CFB subtrahiert (siehe Zeichnung).


Mit dem Term $4\cdot 3$ lässt sich der Flächeninhalt des Rechtecks berechnen.
Die drei Subtrahenden sind -in dieser Reihenfolge- Terme zur Berechnung der Flächeninhalte der Dreiecke BGD, DEC und CFB.</td></tr>
</table>

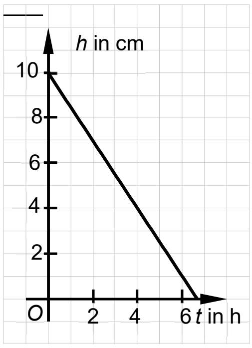
Operator: begründen/nachweisen/zeigen

Aussagen oder Sachverhalte sind durch logisches Schließen zu bestätigen. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.

Aufgabenstellung	Gegeben ist die die lineare Funktion *f* mit $f(x)=\frac{5}{8}\cdot x-\frac{3}{8}\ \ (x\in\mathbb{Q})$. a) **Zeige**, dass der Punkt $(-5\,\vert\,-3{,}5)$ auf dem Graphen der Funktion *f* liegt. b) **Begründe** ohne eine weitere Rechnung, dass *f* eine positive Nullstelle besitzt.
EB zu a) ohne Hilfsmittel	a) $f(-5)=\frac{5}{8}\cdot(-5)-\frac{3}{8}=\frac{-25}{8}-\frac{3}{8}=-\frac{28}{8}=-\frac{7}{2}=-3{,}5$ Wahre Aussage, also liegt der Punkt auf dem Graphen von *f*.
EB zu a) mit CAS	a) $f(-5)=-3{,}5$ Wahre Aussage, also liegt der Punkt auf dem Graphen von *f*.
EB zu b)	b) Da der Graph von *f* die *y*-Achse im negativen Bereich schneidet und der Anstieg positiv ist, muss die Funktion eine positive Nullstelle besitzen (siehe Skizze). 

Operator: grafisch darstellen, zeichnen

Die grafische Darstellung bzw. Zeichnung ist möglichst genau anzufertigen.

Aufgabenstellung	Eine Kerze ist 10 cm lang und brennt mit 1,5 cm pro Stunde ab. **Stelle** die Höhe *h* der Kerze in Abhängigkeit von der Zeit *t* in einem geeigneten Koordinatensystem **graphisch dar**.
EB	

Operator: skizzieren

Die Skizze ist so anzufertigen, dass sie das im betrachteten Zusammenhang Wesentliche grafisch beschreibt.

Aufgabenstellung	Eine lineare Funktion *f* hat einen negativen Anstieg und eine positive Nullstelle. Eine lineare Funktion *g* hat einen kleineren Anstieg als *f* und die gleiche Nullstelle wie *f*. **Skizziere** je einen möglichen Graphen der Funktionen *f* und *g*.
EB