

Interpretationshilfe zur Verwendung der Operatoren bei Nutzung eines Computeralgebrasystems (CAS) in Klassenstufe 9/10

Ab dem Schuljahr 2021/22 ist im Mathematikunterricht **ab Klasse 8¹** ein Computeralgebrasystem (CAS) verbindlich einzusetzen.

Das bedeutet, dass ab 2024 in der BLF und ab 2026 im Mathematikabitur als elektronisches Hilfsmittel ausschließlich ein CAS genutzt werden kann.

Die im Fach Mathematik häufig vorkommenden Operatoren sind in den Materialien des IQB² wie folgt benannt; sie können durch Zusätze (z. B. „rechnerisch“ oder „grafisch“) konkretisiert werden:

Operator	Erläuterung
angeben, nennen	Für die Angabe bzw. Nennung ist keine Begründung notwendig.
entscheiden	Für die Entscheidung ist keine Begründung notwendig.
beurteilen	Das zu fällende Urteil ist zu begründen.
beschreiben	Bei einer Beschreibung kommt einer sprachlich angemessenen Formulierung und ggf. einer korrekten Verwendung der Fachsprache besondere Bedeutung zu. Eine Begründung für die Beschreibung ist nicht notwendig.
erläutern	Die Erläuterung liefert Informationen, mithilfe derer sich z. B. das Zustandekommen einer grafischen Darstellung oder ein mathematisches Vorgehen nachvollziehen lassen.
deuten, interpretieren	Die Deutung bzw. Interpretation stellt einen Zusammenhang her z. B. zwischen einer grafischen Darstellung, einem Term oder dem Ergebnis einer Rechnung und einem vorgegebenen Sachzusammenhang.
begründen, nachweisen, zeigen	Aussagen oder Sachverhalte sind durch logisches Schließen zu bestätigen. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
berechnen	Die Berechnung ist ausgehend von einem Ansatz darzustellen.
bestimmen, ermitteln	Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
untersuchen	Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
grafisch darstellen, zeichnen	Die grafische Darstellung bzw. Zeichnung ist möglichst genau anzufertigen.
skizzieren	Die Skizze ist so anzufertigen, dass sie das im betrachteten Zusammenhang Wesentliche grafisch beschreibt.

Damit die Schüler das Hilfsmittel CAS effizient nutzen, sollte dessen Einsatz auch bei der Darstellung von Lösungswegen in Abhängigkeit von den Operatoren im Unterricht von Beginn an trainiert und in Leistungsüberprüfungen regelmäßig kontrolliert werden.

Für eine langfristige Vorbereitung oder ergänzende Fortbildung der Kollegen haben die Fachberater für Mathematik an Gymnasien in Sachsen 2021 bereits eine Interpretationshilfe zur Verwendung der Operatoren bei Nutzung eines CAS für Klasse 8 erstellt. Dieser folgt nun eine entsprechende Hilfe für die Klassen 9 bzw. 10 mit Beispielaufgaben schwerpunktmäßig für die Leitideen Messen sowie Raum und Form.

Die Erwartungshorizonte sollen die Unterschiede in den Lösungswegen ohne und mit Verwendung von Hilfsmitteln (HM) verdeutlichen. Der Erwartungshorizont stellt für jede Aufgabe eine mögliche Lösungsvariante dar. Die Beispiele zeigen, dass in der Geometrie das Verwenden eines CAS häufig nicht zu anderen Lösungswegen führt bzw. keinen großen Vorteil gegenüber der hilfsmittelfreien Lösung darstellt.

Die Fachberater Sachsens für Mathematik an Gymnasien

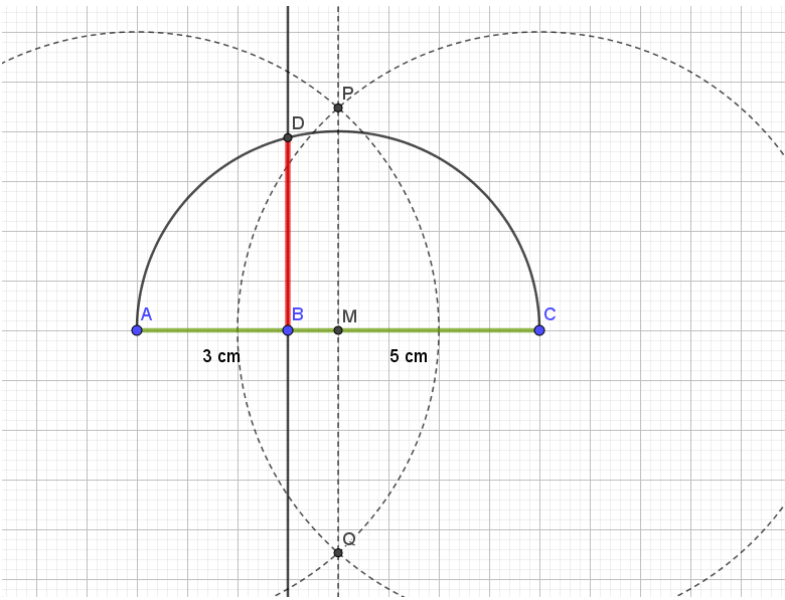
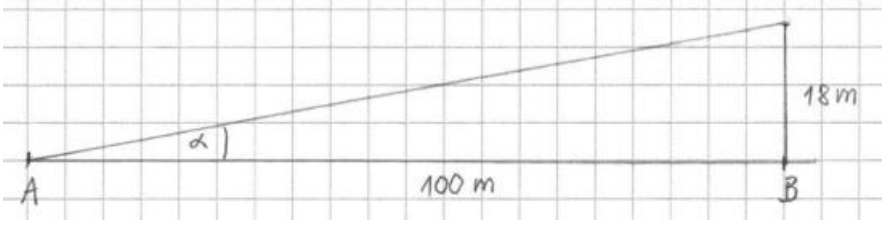
Oktober 2022

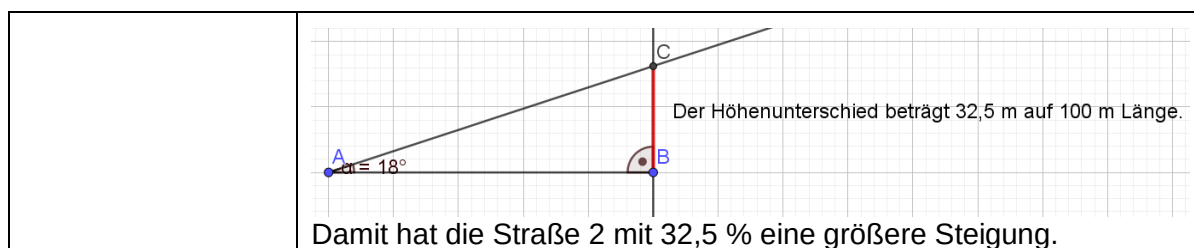
¹ Bis zum Schuljahr 2024/25 werden GTR mit und ohne CAS bzw. CAS auf einer anderen Plattform parallel verwendet, da in höheren Klassen das Hilfsmittel bereits gewählt und eingeführt wurde.

² Quelle der Tabelle: <https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/dokumente/mathematik>

Operator: angeben, nennen

Für die Angabe bzw. Nennung ist keine Begründung notwendig.

Aufgabenstellung Beispiel 1	Gegeben sind die Strecken $\overline{AB}$ mit der Länge 3 cm und $\overline{BC}$ mit 5 cm. Die Abbildung zeigt die Konstruktion der Strecke $\overline{BD}$ mit einer Länge von $\sqrt{15}$ cm.  Nennen Sie zwei mathematische Sätze, welche die Grundlage für diese Konstruktion bilden.
EH	1. Satz des Thales: Wenn ein Peripheriewinkel über dem Durchmesser eines Kreises liegt, dann hat er eine Größe von 90°. 2. Höhensatz: Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist, dann ist der Flächeninhalt des Quadrates über der Höhe gleich dem Flächeninhalt des Rechtecks aus den beiden Hypotenusenabschnitten. Für eine vollständige Lösung sollte der Name des Satzes oder dessen Inhalt benannt werden.
Aufgabenstellung Beispiel 2 (in Verbindung mit einer Begründung)	Die Straße 1 hat eine Steigung von 18 %, die Straße 2 hat einen Steigungswinkel mit einer Größe von 18°. Geben Sie an, welche der beiden Straßen die größere Steigung hat. Begründen Sie Ihre Angabe.
EH ohne HM	Straße 2 hat die größere Steigung.  Maßstab: 1 cm $\hat{=}$ 10 m Die Messung von α ergibt eine Größe von etwa 10°. Somit hat Straße 2 eine größere Steigung als Straße 1.
EH mit HM	Die Straße 2 hat die größere Steigung. Variante 1 (rechnerische Begründung): $\tan(18^\circ) \approx 0,325$, damit hat die Straße 2 eine Steigung von etwa 32,5 % Variante 2 (grafische Begründung mit DGS):



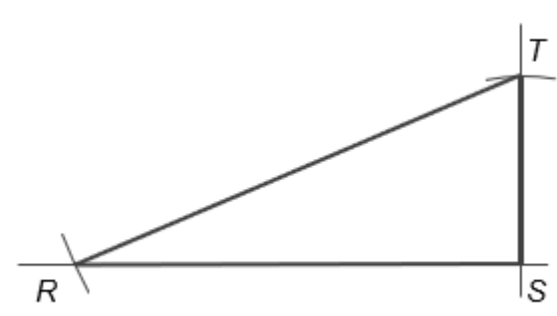
Operator: berechnen

Die Berechnung ist ausgehend von einem Ansatz darzustellen.

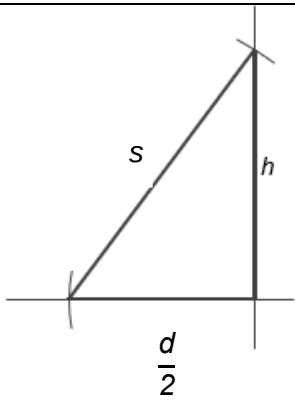
Aufgabenstellung (nur für HM)	Ein Straßenabschnitt mit einer Länge von 248,0 m besitzt eine Steigung von 12 %. Berechnen Sie die Größe des Steigungswinkels α und den Höhenunterschied h des Straßenabschnitts.
EH mit HM	Für $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ liefert $\tan(\alpha) = 0,12$ den Wert $\alpha \approx 7^\circ$ Aus $\sin(7^\circ) = \frac{h}{248,0 \text{ m}}$ folgt $h \approx 30,2 \text{ m}$

Operator: bestimmen/ermitteln

Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.

Aufgabenstellung Beispiel 1	Von einem rechtwinkligen Dreieck RST sind die Seitenlängen $\overline{ST} = 2,5 \text{ cm}$ und $\overline{RT} = 6,5 \text{ cm}$ sowie die Größe des Winkels $\sphericalangle TSR = 90^\circ$ gegeben. Ermitteln Sie grafisch die Länge der Seite $\overline{RS}$.
EH	Lösung durch Konstruktion  Messung ergibt: $\overline{RS} \approx 6,2 \text{ cm}$

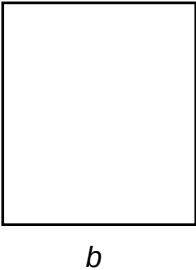
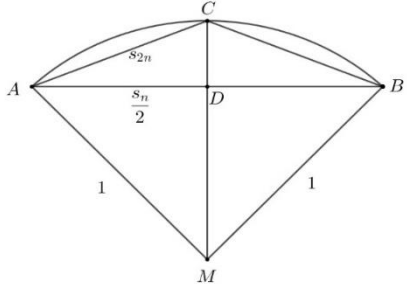
Aufgabenstellung Beispiel 2	Von einem rechtwinkligen Dreieck RST sind die Seitenlängen $\overline{ST} = 2,5 \text{ cm}$ und $\overline{RT} = 6,5 \text{ cm}$ sowie die Größe des Winkels $\sphericalangle TSR = 90^\circ$ gegeben. Ermitteln Sie rechnerisch die Länge der Seite $\overline{RS}$.
EH mit HM	$2,5^2 + t^2 = 6,5^2 \Leftrightarrow t = 6$ (da $t > 0$) Die Länge der Seite $\overline{RS}$ beträgt 6,0 cm.

Aufgabenstellung Beispiel 3	Ein gerader Kreiskegel besitzt einen Durchmesser d mit $d = 6 \text{ cm}$ und eine Seitenlinie s mit $s = 5 \text{ cm}$. Ermitteln Sie die Höhe h dieses Kreiskegels.
EH ohne HM	Variante 1 (grafische Lösung): Messung ergibt: $h \approx 4 \text{ cm}$ Variante 2 (rechnerische Lösung): $h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2$ $h^2 + (3 \text{ cm})^2 = (5 \text{ cm})^2$ $h = \sqrt{25 \text{ cm}^2 - 9 \text{ cm}^2}$ $\underline{\underline{h = 4 \text{ cm}}}$ Die Höhe beträgt 4 cm. 
EH mit HM	$3^2 + h^2 = 5^2$ und $h > 0 \Leftrightarrow h = 4$ (Rechnung in Zentimeter) Die Höhe beträgt 4 cm.

Operator: untersuchen

Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.

Aufgabenstellung Beispiel 1	Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Seitenlängen $a = 12 \text{ cm}$ und $b = 15 \text{ cm}$. Untersuche, wie viele Möglichkeiten es für die dritte Seitenlänge der Seite c gibt (und benenne jeweils die Katheten, die Hypotenuse und den rechten Winkel).
EH mit HM	a, b als Katheten, c Hypotenuse, Innenwinkel bei C ist der rechte Winkel: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{144 + 225} \text{ cm} = \sqrt{369} \text{ cm} \approx 19,2 \text{ cm}$ möglich b Hypotenuse, a, c Katheten, Innenwinkel bei B ist der rechte Winkel: $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{225 - 144} \text{ cm} = 9 \text{ cm}$ möglich a Hypotenuse, b, c Katheten, Innenwinkel bei A ist der rechte Winkel: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{144 - 225} \text{ cm}$ nicht möglich (da die Hypotenuse stets die längste Seite im rechtwinkligen Dreieck und $a < b$ dazu ein Widerspruch ist).
EH ohne HM	Die gegebenen Seiten könnten beide Katheten des rechtwinkligen Dreiecks sein, das wäre eine Möglichkeit. Des Weiteren könnte die längere der gegebenen Seiten, also b, die Hypotenuse sein. Daraus ergibt sich eindeutig (Kongruenz von Dreiecken) die dritte Seite. Daher gibt es zwei Möglichkeiten.
Aufgabenstellung Beispiel 2	Ein A4-Blatt kann auf zwei Arten so zu einem geraden Kreiszylinder „gebogen“ werden, dass das Blatt exakt der Mantelfläche des Zylinders entspricht. Untersuchen Sie, welcher der beiden Zylinder das größere Volumen hat oder ob beide den gleichen Raum einnehmen.

EH	 Die Seitenlängen des A4-Blatts sind die Länge a und die Breite b ($a > b$). Fall 1: Der Zylinder hat die Höhe a; der Umfang des Grundkreises beträgt dann b. Damit folgt für den Radius r_1 des ersten Zylinders $r_1 = \frac{b}{2\pi}$ ($b = 2\pi \cdot r_1$). Für das Volumen ergibt sich $V_1 = \pi \cdot r_1^2 \cdot a = \pi \cdot \frac{b^2}{4\pi^2} \cdot a = \frac{ab^2}{4\pi}$ Fall 2: Für das Volumen des zweiten Zylinders ergibt sich analog $V_2 = \pi \cdot r_2^2 \cdot b = \frac{a^2b}{4\pi}$ Da $a > b$ ist, folgt $V_2 > V_1$, d.h. der Zylinder mit der kleineren Höhe hat das größere Volumen. (Alternativ konkret mit $a = 29,7$ cm und $b = 21,0$ cm lösen.)
EH ohne HM	In der Formel zur Berechnung des Volumens eines Kreiszylinders geht der Radius quadratisch ein. Im ersten Fall ist a die Höhe, im zweiten Fall b. Daher muss der zweite Zylinder das größere Volumen haben, da er den größeren Radius hat.
Aufgabenstellung Beispiel 3 (nur für Arbeit mit HM)	In einem Einheitskreis (Kreis mit Radius 1) ist ein regelmäßiges Sechseck einbeschrieben. Der halbe Umfang des Sechsecks beträgt 3. Durch geeignete Streckenhalbierung kann aus dem Sechseck ein regelmäßiges 12 – Eck konstruiert werden. Dieses „Halbierungsverfahren“ kann theoretisch beliebig oft fortgesetzt werden. Untersuchen Sie, welchem Wert sich bei diesem Verfahren der jeweilige halbe Umfang des regelmäßigen n-Ecks annähert.
EH mit HM (Hinweis: Im Anhang ist ein bei der Berechnung mit CAS auftretender Fehler dokumentiert.)	Es sei $\overline{AB}$ eine Seite des n-Ecks mit der Länge s_n und $\overline{AC}$ eine Seite des entsprechenden $2n$-Ecks mit der Länge s_{2n} (siehe Abbildung). Im rechtwinkligen Dreieck AMD gilt $\overline{DM} = \sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}$ Für das rechtwinklige Dreieck ADC ergibt sich damit $s_{2n} = \sqrt{\left(\frac{s_n}{2}\right)^2 + (1 - \overline{DM})^2} = \sqrt{\left(\frac{s_n}{2}\right)^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}\right)^2} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$ Vorschlag zur Bearbeitung im Rechenmenü (muss vom Schüler nicht dokumentiert werden): k ... Anzahl der Schritte s ... Seitenlänge des einbeschriebenen n-Ecks $0 \rightarrow k, 1 \rightarrow s$ $\sqrt{2 - \sqrt{4 - s^2}} \rightarrow s:k+1 \rightarrow k:3 \cdot 2^k \cdot 2$ 

Durch fortlaufende Bedienung der ENTER-Taste wird jeweils die letzte Befehlszeile ausgeführt und damit sollte der jeweilige halbe Umfang des entsprechenden einbeschriebenen $2n$ -Ecks angegeben sein. Der halbe Umfang nähert sich der Zahl π an.

Variante 3 (mit Tabellenkalkulation eines CAS):

Schritt- anzahl k	Eckenanzahl $n = 3 \cdot 2^{k+1}$	halber Umfang
0	6	3
1	12	3,10582854123
2	24	3,13262861328
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
12	24576	3,14159248163
13	49152	3,14159728794

Der halbe Umfang nähert sich der Zahl π an.

Bemerkung:

Lösung durch logisches Schließen:

Da die Eckpunkte des n -Ecks immer auf dem Kreis liegen und die Eckenzahl theoretisch unendlich groß werden kann, nähert sich der halbe Umfang des n -Ecks dem halben Umfang des Kreises, also π .

Operator: entscheiden

Für die Entscheidung ist keine Begründung notwendig.

Aufgabenstellung	Ein Kreiskegel hat eine Höhe von 12 cm und ein Volumen von 36 cm^3. Entscheiden Sie, welche der folgenden Maßzahlen der Radius des Kreiskegels in Zentimeter hat. a) $3\sqrt{\pi}$ b) $\sqrt{3\pi}$ c) $\frac{3}{\sqrt{\pi}}$ d) $\sqrt{\frac{3}{\pi}}$ e) $\sqrt{\frac{9}{\pi}}$
EH	c) und e)

Operator: beurteilen

Das zu fällende Urteil ist zu begründen.

Aufgabenstellung	Ein Satellit fliegt mit konstanter Geschwindigkeit von $7,70 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ auf einer Kreisbahn in 400,0 km Höhe über der Erdoberfläche (Der Erdradius wird mit 6370,0 km angenommen). Um Kollisionen auszuschließen, wird seine Flughöhe um 50,0 km erhöht. Beurteilen Sie die folgende Aussage: <i>Die Geschwindigkeit muss um weniger als 1 % erhöht werden, um die gleiche Umlaufzeit des Satelliten zu erhalten.</i>
EH mit HM	Die Aussage ist wahr. Mit $s_1 = 2 \cdot \pi \cdot r_1 = 2 \cdot \pi \cdot (6370 + 400)$ und $v_1 = \frac{s_1}{t}$ folgt $t \approx 5520$. Mit $s_2 = 2 \cdot \pi \cdot r_2 = 2 \cdot \pi \cdot (6370 + 400 + 50)$ und $v_2 = \frac{s_2}{t}$ ergibt sich eine Geschwindigkeit von etwa $7,76 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ nach der Erhöhung. Das entspricht ca. 100,8 % der Ausgangsgeschwindigkeit, also einer Erhöhung um weniger als 1 %.

Operator: beschreiben

Bei einer Beschreibung kommt einer sprachlich angemessenen Formulierung und ggf. einer korrekten Verwendung der Fachsprache besondere Bedeutung zu. Eine Begründung für die Beschreibung ist nicht notwendig.

Aufgabenstellung Beispiel 1	In einem Kreis ist ein regelmäßiges Sechseck einbeschrieben. Beschreiben Sie, wie aus dem Sechseck ein regelmäßiges Zwölfeck konstruiert werden kann, dessen Eckpunkte alle auf dem Kreis liegen.
EH	Ich fälle das Lot vom Mittelpunkt des Kreises k auf eine Seite s des Sechsecks. Dieses schneidet k zwischen den Eckpunkten auf der Seite s im Punkt S . Der Abstand von S zu einem auf s liegendem Eckpunkt des Sechsecks ist die Seitenlänge des Zwölfecks. Diese kann von S aus immer wieder auf k abgetragen werden, bis alle Eckpunkte festgelegt sind.

Aufgabenstellung Beispiel 2	Von einer geraden quadratischen Pyramide sind die Längen der Grundkanten und der Seitenkanten gegeben. Beschreiben Sie ein Verfahren zur Berechnung des Oberflächeninhalts der Pyramide.
EH	• Berechnung des Flächeninhalts A_G der quadratischen Grundfläche • Berechnung der Höhe einer Seitenfläche unter Nutzung des Satzes des Pythagoras, dazu wird die Seitenfläche in zwei zueinander kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt. • Berechnung des Flächeninhalts A_S einer Seitenfläche • Der Oberflächeninhalt A_O ergibt sich mit $A_O = A_G + 4 \cdot A_S$.

Operator: erläutern

Die Erläuterung liefert Informationen, mithilfe derer sich z. B. das Zustandekommen einer grafischen Darstellung oder ein mathematisches Vorgehen nachvollziehen lassen.

Aufgabenstellung	Ein Straßenabschnitt mit einer Länge von 248,0 m besitzt eine Steigung von 12 %. Zur Berechnung der Größe des Steigungswinkels α und des Höhenunterschiedes h der Straße wurden folgende Gleichungen verwendet: I. $\tan(\alpha) = 0,12$ II. $\sin(\alpha) = \frac{h}{248,0 \text{ m}}$ Erläutern Sie die Gleichungen I und II im Sachzusammenhang.
EH	I Der Tangens der Größe des Steigungswinkels α der Straße entspricht dem Anstieg, wobei für die Steigung 12 % = 0,12 gilt. II Der Sinus der Größe des Steigungswinkels α entspricht dem Quotienten aus dem Höhenunterschied h und der Straßenlänge von 248,0 m, weil der Sinus eines Winkels im rechtwinkligen Dreieck dem Quotienten aus Gegenkathete und Hypotenuse entspricht.

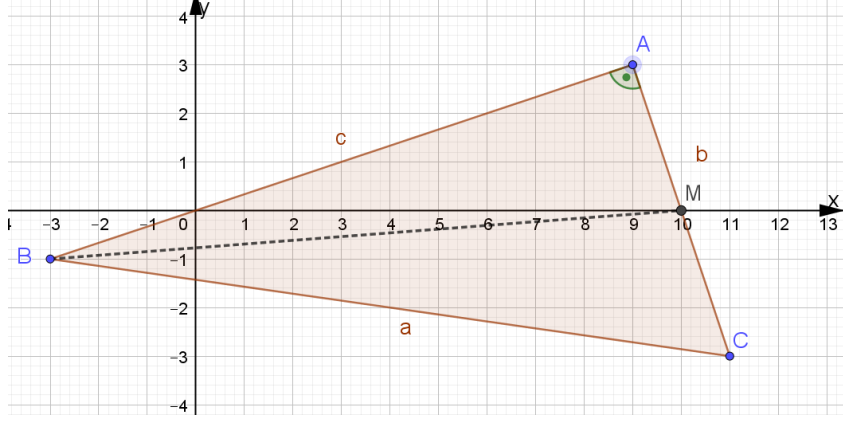
Operator: deuten/interpretieren

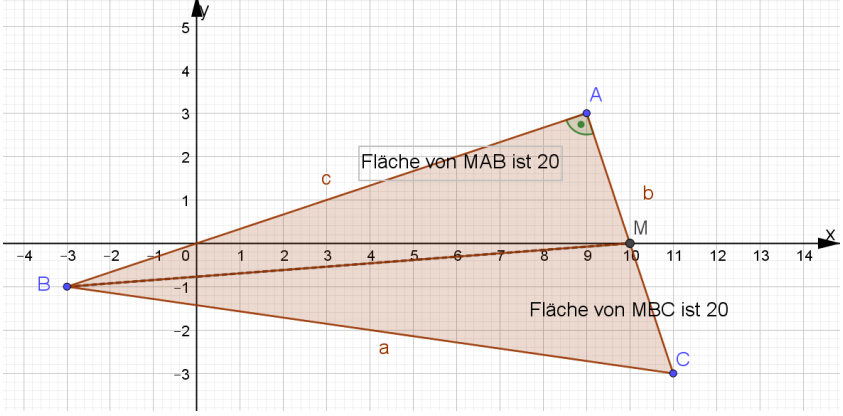
Die Deutung bzw. Interpretation stellt einen Zusammenhang her z. B. zwischen einer grafischen Darstellung, einem Term oder dem Ergebnis einer Rechnung und einem vorgegebenen Sachzusammenhang.

Aufgabenstellung	Die Abbildung zeigt das Anzeigefeld eines Taschenrechners. Dabei ist r der Radius und h die Höhe eines Kreiszylinders. Interpretieren Sie die angezeigten Gleichungen bzw. Terme im Sachzusammenhang. Define $V(r, h) = \pi \cdot r^2 \cdot h$ done $\frac{V(2r, 3h)}{V(r, h)}$ 12 $V(r, 3h) - V(r, h)$ $2 \cdot h \cdot r^2 \cdot \pi$
EH	Zuerst wird das Volumen des Zylinders in Abhängigkeit von r und h definiert. Die dritte Zeile bildet den Quotienten aus den Volumina zweier verschiedener Zylinder, wobei beim ersten gegenüber dem zweiten der Radius verdoppelt und die Höhe verdreifacht wurde. Das Volumenverhältnis beträgt 12. In Zeile 5 wird die Differenz zweier Volumina berechnet, wobei das erste Volumen das eines Zylinders mit dreifacher Höhe im Vergleich zum zweiten darstellt. Im Ergebnis erhält man das doppelte Volumen des ursprünglichen Zylinders.

Operator: begründen/nachweisen/zeigen

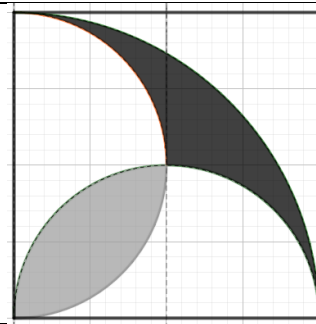
Aussagen oder Sachverhalte sind durch logisches Schließen zu bestätigen. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.

Aufgabenstellung Beispiel 1	Betrachtet wird das Dreieck ABC mit $A(9 3)$, $B(-3 -1)$ und $C(11 -3)$. a) Zeigen Sie rechnerisch, dass dieses Dreieck rechtwinklig ist. b) Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC den Flächeninhalt 40 besitzt. c) Der Mittelpunkt von $\overline{AC}$ ist M. Begründen Sie, dass die Dreiecke MAB und MBC denselben Flächeninhalt haben.
EH zu a)	 Mit $\overline{AC} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40}$, $\overline{BC} = \sqrt{14^2 + 4^2} = \sqrt{200}$ und $\overline{AB} = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{160}$ ergibt sich: $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$. Daraus folgt

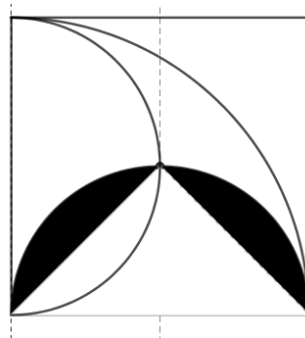
	nach der Umkehrung des Satzes des Pythagoras die Rechtwinkligkeit.
EH zu b)	$A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6400} = 40$
EH zu c)	Weil M der Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$ ist, sind die Grundseiten $\overline{MA}$ und $\overline{MC}$ beider Dreieck gleich lang. Die zugehörige Höhe ist jeweils $\overline{AB}$. Da sich der Flächeninhalt aus den Längen der Grundseiten und der zugehörigen Höhen berechnet und diese übereinstimmen, müssen die beiden Flächeninhalte gleich groß sein.
EH zu c) mit HM	Bei der Nutzung von DGS gibt es die Möglichkeit, den Flächeninhalt eines Polygons direkt ermitteln zu lassen.  Die Flächeninhalte der beiden Teilflächen sind gleich groß.
Aufgabenstellung Beispiel 2	In einer Formelsammlung steht die Formel zur Berechnung des Volumens eines geraden Kreiskegelstumpfs mit den Radien r und R ($R > r$) sowie der Höhe h: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot (r^2 + r \cdot R + R^2).$ Wird der Kegelstumpf als Differenz zweier Kegel betrachtet, ergibt sich folgende Formel: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot \frac{R^3 - r^3}{R - r}.$ Begründen Sie, dass beide Formeln äquivalent zueinander sind.
EH ohne HM	Wenn beide Formeln äquivalent zueinander sind, muss für alle r, R gelten: $r^2 + r \cdot R + R^2 = \frac{R^3 - r^3}{R - r}$ Daraus ergeben sich folgende Umformungen: $r^2 + r \cdot R + R^2 = \frac{R^3 - r^3}{R - r} \Leftrightarrow (r^2 + r \cdot R + R^2) \cdot (R - r) = R^3 - r^3 \Leftrightarrow$ $r^2 \cdot R + r \cdot R^2 + R^3 - r^3 - r^2 \cdot R - r \cdot R^2 = R^3 - r^3$
EH mit HM	Eingabe der Gleichung $r^2 + r \cdot R + R^2 = \frac{R^3 - r^3}{R - r}$ in das CAS liefert „true“. Somit sind die Terme äquivalent zueinander.

Aufgabenstellung
Beispiel 3

In einem Quadrat der Seitenlänge a sind zwei unterschiedlich gefärbte Flächen dargestellt (siehe Abbildung).
Zeigen Sie, dass die beiden Flächen denselben Inhalt haben.



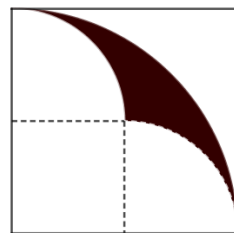
EH



Berechnung beider Teilflächeninhalte und Vergleich der Terme:

Der Inhalt der Fläche A_1 (in der Aufgabe grau gefärbt) ergibt sich als Differenz von Halbkreisflächeninhalt mit Radius $\frac{a}{2}$ und dem Inhalt eines gleichschenkelig rechtwinkligen Dreiecks:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} = a^2 \cdot \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)$$



Den Inhalt der anderen Teilfläche A_2 erhält man als Differenz des Inhalts eines Viertelkreises mit Radius a und der Summe der Inhalte zweier Viertelkreise (jeweils mit Radius $\frac{a}{2}$) und dem Flächeninhalt eines

Quadrats mit Seitenlänge $\frac{a}{2}$:

$$A_2 = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot a^2 - \left(2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right)$$

Vereinfachen des Terms liefert

$$A_2 = a^2 \cdot \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)$$

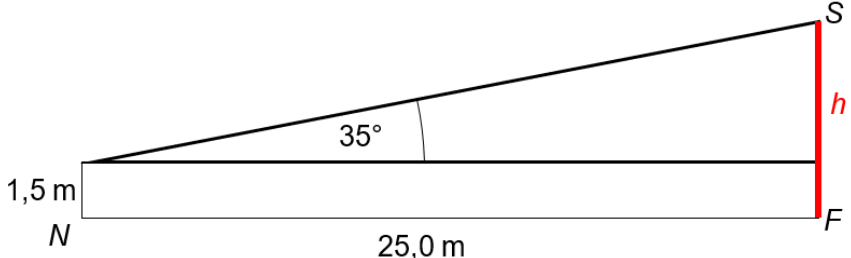
Somit gilt $A_1 = A_2$, d.h. beide Flächen haben denselben Inhalt.

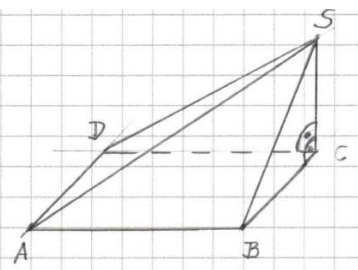
Bemerkung:

Bei Verwendung der Aufgabe ohne HM sind beim Vereinfachen der Terme zum Zeigen der Äquivalenz weitere, aufwändige Termumformungen notwendig.

Operator: skizzieren

Die Skizze ist so anzufertigen, dass sie das im betrachteten Zusammenhang Wesentliche grafisch beschreibt.

Aufgabenstellung Beispiel 1	Bei einer Wanderung im ebenen Gelände entdeckt Nina eine hohe Eiche. Ninas Füße befinden sich im Punkt N , der Fußpunkt der Eiche im Punkt F . Nina möchte die Höhe der Eiche bestimmen. Die Entfernung von N zu F beträgt 25,0 m. Aus ihrer Augenhöhe von 1,5 m sieht sie die Spitze S der Eiche unter einem Winkel von 35° gegenüber der Horizontalen. Skizzieren Sie den Sachverhalt und markieren Sie die gegebenen und gesuchten Größen.
EB	

Aufgabenstellung Beispiel 2	Eine Pyramide besitzt die quadratische Grundfläche $ABCD$. Die Spitze S befindet sich auf einer Geraden, die senkrecht zur Grundfläche und durch den Punkt C verläuft. Skizzieren Sie die Pyramide $ABCD S$.	
EB	 Bemerkung: Die Skizze kann auch frei Hand ausgeführt werden.	

Anhang

Anmerkung zur Aufgabe zum Operator: Untersuche

Schrittanzahl k	Eckenanzahl $n = 3 \cdot 2^{k+1}$	halber Umfang
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
22	12582912	3,44597237075
23	25165824	3,97906615175
24	50331648	0

Zunächst wächst die Folge monoton und nähert sich einem festen Wert. Bei Fortsetzung wächst die Folge plötzlich weiter und „stürzt“ schließlich zur Zahl 0 ab. Rechner rechnen manchmal falsch!

Die Ursache ist die so genannte „Differenzenkatastrophe“, welche bei der Arbeit mit Rechnern zu beachten ist. Der Wert s_n wird für wachsende n kleiner und ab einem bestimmten n (interne Rechnergenauigkeit) auf 0 gesetzt. Zur Vermeidung der „Differenzenkatastrophe“ formt man die obige Beziehung mittels binomischer Formeln wie folgt um:

$$s_{2n} = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{4 - (s_n)^2}) \cdot (2 + \sqrt{4 - (s_n)^2})}{(2 + \sqrt{4 - (s_n)^2})}} = \frac{s_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - (s_n)^2}}}$$

Bei Verwendung dieser Beziehung wird die „Differenzenkatastrophe“ umgangen.